

Olimpíada Brasileira de Física 2001

3ª Fase

Gabarito do Exame para o 3º Ano

1ª QUESTÃO

Leis de Newton e Lei dos Gases Ideais

a) Na iminência de movimento do bloco, o módulo da força elástica é igual ao máximo valor da força de atrito estático, isto é:

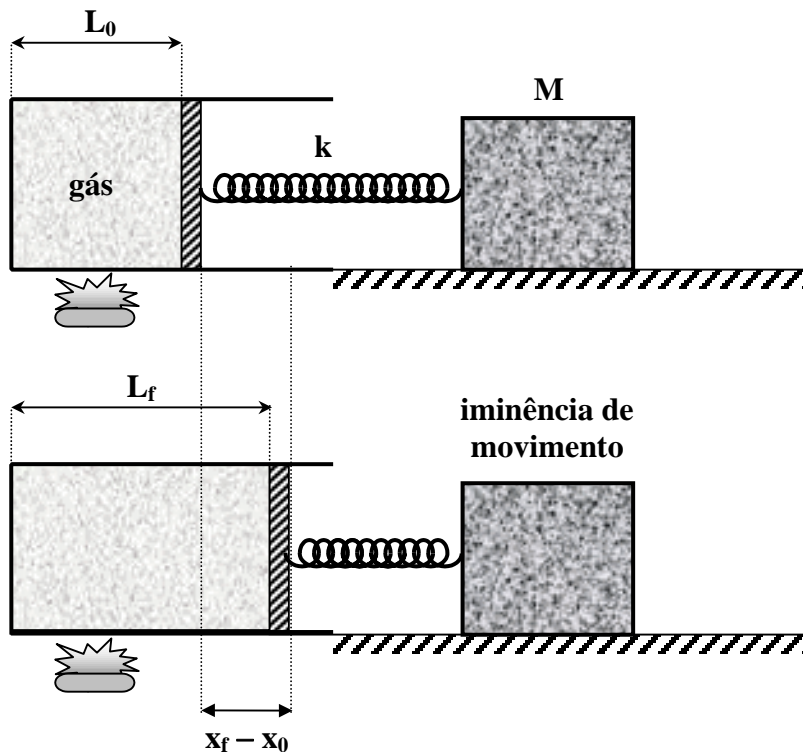
$$k x_f = \mu_e M g \Rightarrow x_f = \mu_e M g / k = 8 \text{ cm.}$$

Uma vez que $x_f - x_0 = L_f - L_0$, conforme mostra a figura a seguir, então o comprimento do recipiente nessa situação é:

$$L_f = 14 \text{ cm.}$$

A resposta do item (a) é

$$L_f = 14 \text{ cm}$$



b) Se a expansão do gás ideal ocorre lentamente e à velocidade constante (processo quase-estático), em qualquer instante a força que o gás exerce sobre a tampa é equilibrada pela força elástica (não há atrito entre a tampa e o recipiente), isto é, $F_{\text{gás}} = k x$. A pressão na tampa é dada por $p = F_{\text{gás}} / A = k x / A$, onde A é a área da tampa. Para um gás ideal confinado num recipiente fechado, tem-se que $p V / T$ é constante. Assim, considerando o volume do cilindro $V = A L$, pode-se obter uma relação entre as temperaturas final e inicial:

$$T_f/T_0 = (x_f L_f)/(x_0 L_0) \Rightarrow T_f = 2,8 T_0 = 840 \text{ K} = 567 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A resposta do item (b) é

$$T_f = 840 \text{ K} = 567 \text{ }^\circ\text{C}$$

2ª QUESTÃO

Conservação de Energia Mecânica e Lançamento de Projéteis

a) Para se determinar o valor mínimo da compressão inicial x da mola tal que o corpo não perca o contato com a superfície, exceto no trecho CD, pode-se utilizar o princípio da conservação da energia mecânica no deslocamento de A para C, uma vez que não há atrito nem resistência do ar. No ponto A, existe apenas energia potencial elástica, enquanto que no ponto C há energia potencial gravitacional e energia cinética. Logo:

$$(1/2)kx^2 = mgH_C + (1/2)mv_C^2,$$

onde a altura do ponto C pode ser expressa em termos do raio R e do ângulo θ :

$$H_C = R + R \cos(\theta),$$

que, substituída na equação anterior, leva a:

$$kx^2 = 2mgR[1 + \cos(\theta)] + mv_C^2.$$

A determinação de x exige o cálculo de v_C . Entre os pontos C e D o corpo realiza um movimento cujo alcance horizontal deve ser:

$$\Lambda = 2R \sin(\theta),$$

para que o contato com a superfície seja retomado precisamente no ponto D. Por outro lado, tal alcance relaciona-se diretamente com v_C através da equação:

$$\Lambda = 2t_S v_C \cos(\theta),$$

em que t_S é o tempo de subida até o ponto mais alto da trajetória, onde a componente vertical da velocidade do corpo v_y deve ser nula. Utilizando a equação horária de v_y , obtém-se:

$$0 = v_C \sin(\theta) - g t_S, \text{ ou:}$$

$$t_S = v_C \sin(\theta)/g,$$

o qual, substituído nas expressões para o alcance implica em:

$$v_C^2 = Rg/\cos(\theta).$$

Finalmente, a substituição deste resultado na equação da conservação da energia leva a:

$$x = \{(mgR/k)[2(1 + \cos(\theta)) + (1/\cos(\theta))]\}^{1/2}.$$

Inserindo acima os valores das grandezas fornecidos no enunciado, obtém-se que:

$$x = 0,5 \text{ m.}$$

A resposta do item (a) é

$$x = 0,5 \text{ m}$$

b) No ponto C, a aplicação da segunda lei de Newton para o movimento circular leva a:

$$N + mg \cos(\theta) = m v_C^2 / R,$$

onde N denota a força normal, de direção radial e sentido apontando para o centro do “loop”, enquanto que o termo após a igualdade representa o módulo da força resultante centrípeta agindo sobre o corpo. Substituindo a expressão do item a) para v_C , obtém-se:

$$N = mg \{ [1 / \cos(\theta)] - \cos(\theta) \},$$

a qual, para os valores numéricos fornecidos, implica em:

$$N = 0,15 \text{ N.}$$

A resposta do item (b) é

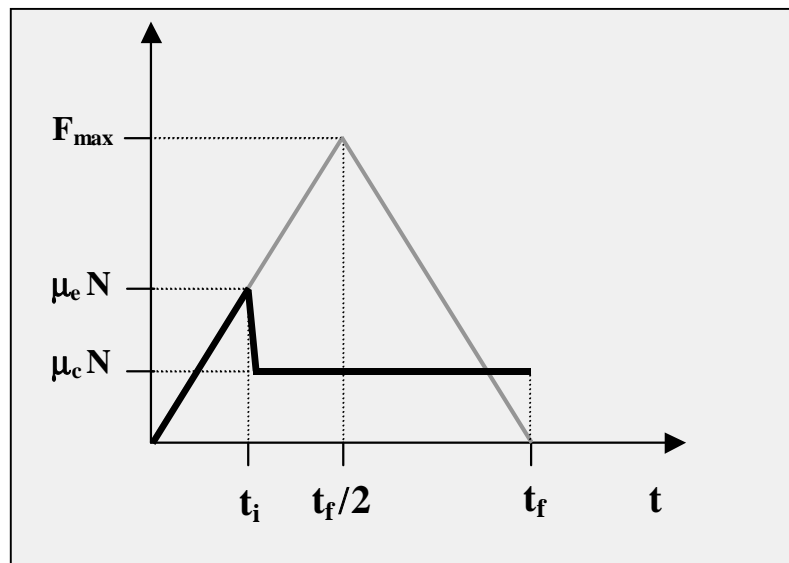
A força normal no ponto C tem módulo $N = 0,15 \text{ N}$, direção radial e sentido apontando para o centro do “loop”

3ª QUESTÃO

Impulso e Quantidade de Movimento

a) À medida em que o módulo da força F sobre o bloco aumenta, igualmente aumenta também o módulo da força de atrito estático deste com a superfície horizontal, até o instante $t_i < t_f / 2$ de iminência de movimento, a partir do qual o bloco passa a se movimentar. O módulo da força de atrito cinético é constante (situação idealizada) e menor que o valor máximo da força de atrito estático. No instante t_f , o bloco retorna ao repouso. Assim, o gráfico do módulo da força de atrito em função do tempo é mostrado a seguir.

A resposta do item (a) é



b) O teorema do impulso – quantidade de movimento diz que a variação da quantidade de movimento (ou momento linear) do bloco é igual ao impulso I_R da força resultante agindo sobre ele, o qual, por sua vez, é numericamente idêntico à área do gráfico força resultante F_R vs. tempo. Como ambas as forças F e de atrito F_{at} atuam na direção horizontal, mas têm sentidos opostos, então $F_R = F - F_{at}$. Desse modo, uma vez que as velocidades inicial e final do bloco são nulas, não há variação da sua quantidade de movimento e, portanto, as áreas sob os gráficos de F e F_{at} devem ser iguais, isto é:

$$I_R = F_{\max} t_f / 2 - \mu_c M g t_i / 2 - \mu_c M g (t_f - t_i) = 0.$$

Na equação anterior, foi considerado o caso idealizado em que o tempo de transição entre as situações de atrito estático e cinético é desprezível.

A razão entre t_f e t_i vale portanto:

$$t_f / t_i = (\mu_e - 2\mu_c) / [(F_{\max} / M g) - 2\mu_c] = 0,5.$$

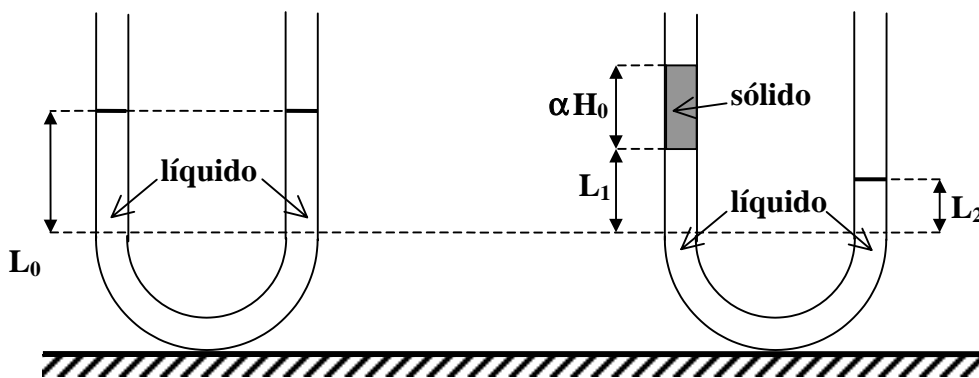
A resposta do item (b) é

$$t_f / t_i = 0,5$$

4ª QUESTÃO

Hidrostatica

a) A figura abaixo ilustra qualitativamente as situações de equilíbrio hidrostático inicial e final:



Após o congelamento de uma porção de líquido de comprimento vertical inicial H_0 , o qual passa a ocupar uma altura αH_0 na fase sólida, pode-se concluir que:

$$2L_0 = H_0 + L_1 + L_2,$$

onde L_0 representa o nível inicial da substância na fase líquida (em relação a uma altura arbitrária ao longo da porção vertical do tubo – ver figura) e, na nova situação de equilíbrio, L_2 é o nível da substância na extremidade que não foi resfriada, enquanto que L_1 denota o nível da substância que permaneceu em estado líquido na extremidade resfriada.

Pelo princípio de Stevin:

$$d_l g L_1 + d_s g \alpha H_0 = d_l g L_2,$$

onde d_ℓ e d_s denotam, respectivamente, as densidades da substância nas fases líquida e sólida. Assim:

$$L_2 - L_1 = \alpha H_0 (d_s / d_\ell).$$

Aplicando agora a conservação da massa da porção de líquido que se solidificou:

$$M_\ell = M_s \Rightarrow d_\ell A H_0 = d_s A \alpha H_0 \Rightarrow d_s / d_\ell = 1 / \alpha,$$

que substituída na equação anterior leva a:

$$L_2 - L_1 = H_0.$$

Finalmente, a substituição da equação acima na primeira equação implica em:

$$L_2 = L_0.$$

A resposta do item (a) é

Na nova situação de equilíbrio, o nível da substância na extremidade que não foi resfriada permanece igual ao seu nível inicial

b) A diferença ΔL entre os níveis da substância na extremidade resfriada nas situações de equilíbrio final e inicial é expressa como:

$$\Delta L = L_f - L_0 = L_1 + \alpha H_0 - L_0,$$

a qual, usando os resultados do item a), permite escrever:

$$\Delta L = H_0 (\alpha - 1).$$

Considerando $\alpha = 1,1$ (caso da água pura, H_2O) e $H_0 = 5$ cm, obtém-se:

$$\Delta L = 0,5 \text{ cm},$$

ou seja, na extremidade resfriada o nível final da substância é maior que o inicial.

A resposta do item (b) é

$\Delta L = 0,5 \text{ cm}$

5ª QUESTÃO

a) A equação da onda que se propaga no sentido positivo do eixo x é dada por

$y_+(x,t) = A \text{sen}(kx - \omega t) = A \text{sen}(2\pi x / \lambda - 2\pi f t)$, enquanto a onda que se propaga no sentido negativo deve ser

$y_-(x,t) = A \text{sen}(kx + \omega t) = A \text{sen}(2\pi x / \lambda + 2\pi f t)$.

A soma das ondas propagantes resulta numa onda estacionária.

$$y_+(x,t) + y_-(x,t) = 2A \text{sen}(4\pi x / \lambda) \cos(4\pi f t).$$

A resposta do item (a) é

$$y_E(x,t) = 2A \sin(2x/\lambda) \cos(4\pi ft)$$

b) O comprimento L da corda deve conter um número inteiro de meio comprimento de onda mais um quarto de comprimento de onda devido ao anti-nó em $x = 0$.

$$L = n \times (\lambda/2) + \lambda/2 = (\lambda/2)(n + 1/2).$$

Substituindo os valores para L e λ tem-se $n = 4$.

A resposta do item (b) é

$$\text{número de nós} = 4$$

6ª QUESTÃO

Espelhos Esféricos

a) O comprimento da imagem da haste AB é dado por:

$$L_i = p_B - p_A,$$

onde p_A e p_B representam, respectivamente, as posições das imagens das extremidades A e B da haste.

Utilizando a equação de Gauss para espelhos esféricos, pode-se determinar o valor de p_B :

$$1/f = 1/D + 1/p_B, \text{ ou:}$$

$$p_B = Df / (D - f).$$

Um cálculo análogo para p_A resulta em:

$$p_A = [(D + L)f] / (D + L - f).$$

Substituindo p_A e p_B na primeira equação:

$$L_i = (Lf^2) / [(D - f)(D + L - f)].$$

A resposta do item (a) é

$$L_i = (Lf^2) / [(D - f)(D + L - f)]$$

b) Se a imagem é superposta ao objeto, logo ambos têm o mesmo comprimento, isto é:

$$L_i = L.$$

Utilizando o resultado do item a) na equação acima, obtém-se uma equação quadrática para a posição da extremidade B nessa situação:

$$x_B^2 + (L - 2f)x_B - fL = 0.$$

com soluções:

$$x_B = (f - L/2) \pm (1/2) [L^2 + 4f^2]^{1/2}.$$

No problema em questão $L = (3/2)f$, de modo que as raízes da equação podem ser escritas como:

$$x_{B1} = (3/2)f \text{ e } x_{B2} = -f \text{ (raiz não física pois a imagem é real e sua coordenada deve ser positiva).}$$

Assim, se $f = 20$ cm, então $x_B = 30$ cm dá a nova posição da extremidade B na situação em que a imagem da haste fica superposta ao objeto. Como $L = 30$ cm, então a extremidade A terá coordenada $x_A = 60$ cm. As posições das imagens dos pontos A e B, $x_{A'} = 30$ cm e $x_{B'} = 60$ cm, podem ser obtidas a partir das equações do item a), fazendo-se $D = x_B = 30$ cm. Curiosamente, apesar de a imagem estar superposta à própria haste, as posições dos pontos reais e refletidos encontram-se invertidas: $x_A = x_{B'}$ e $x_B = x_{A'}$.

A resposta do item (b) é

Posição das extremidades : $x_A = 60$ cm, $x_B = 30$ cm

Posição das suas imagens : $x_{A'} = 30$ cm, $x_{B'} = 60$ cm

As posições das extremidades e de suas imagens encontram-se invertidas, de modo a fazer com que haja uma superposição da haste com a sua própria imagem

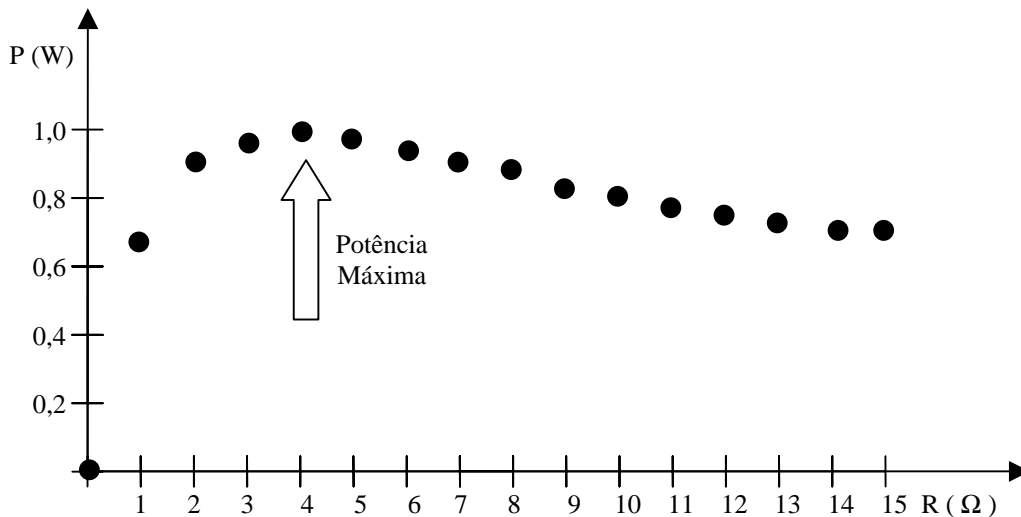
7ª QUESTÃO

a) A potência elétrica dissipada P no resistor R é dada por

$$P = R i^2 = R [\varepsilon / (R + r)]^2 = \frac{R}{(R + r)^2} \varepsilon^2$$

A resposta do item (a) é

$$P = \frac{R}{(R + r)^2} \varepsilon^2$$



Do gráfico tem-se um máximo para $R = 4 \Omega$.

A resposta do item (b) é

$$R = 4 \Omega$$

8ª QUESTÃO

Campo Magnético e Campo Elétrico

a) Como a partícula ingressa nas regiões de campos magnéticos B_1 e B_2 perpendicularmente às linhas que as delimitam, ela desenvolve movimentos circulares e uniformes nestas regiões. Denotando os raios das trajetórias circulares nas regiões 1 e 2 respectivamente por r_1 e r_2 , o comprimento da trajetória abc é então dado por:

$$L = (\pi/2)(r_1 + r_2).$$

Os raios r_1 e r_2 relacionam-se com os campos magnéticos B_1 e B_2 , uma vez que a força magnética que atua na partícula nestas regiões age como a força resultante centrípeta. Por exemplo, na região 1:

$$F_{\text{magnética}} = F_{\text{centrípeta}},$$

ou ainda:

$$q B_1 v_0 \sin(90^\circ) = m v_0^2 / r_1,$$

de modo que:

$$r_1 = m v_0 / q B_1.$$

Da mesma forma, na região 2 tem-se que:

$$r_2 = m v_0 / q B_2.$$

Substituindo r_1 e r_2 na expressão para L :

$$L = (\pi/2)(m v_0 / q) [(B_1 + B_2) / B_1 B_2].$$

A resposta do item (a) é

$$L = (\pi/2)(m v_0 / q) [(B_1 + B_2) / B_1 B_2]$$

b) Na região 3, não há campo magnético, porém existe um campo elétrico uniforme E , que faz com que a partícula sinta uma força elétrica constante de módulo $F = q E$, gerando assim um movimento retilíneo uniformemente variado nesta região. Portanto, a velocidade da partícula ao passar pelo ponto d é dada por:

$$v = v_0 + a t,$$

onde a denota a aceleração da partícula e

$$t = L / v_0$$

representa o tempo decorrido no deslocamento cd, isto é, o tempo que a partícula leva para percorrer a trajetória abc, como dito no enunciado. Tem-se ainda que:

$F = ma = qE$, ou:

$$a = qE/m,$$

que, em conjunto com as equações acima, implica em:

$$v = v_0 + (\pi/2)E[(B_1 + B_2)/B_1 B_2].$$

A resposta do item **(b)** é

$$v = v_0 + (\pi/2)E[(B_1 + B_2)/B_1 B_2]$$